第 13 讲：立体几何角度问题

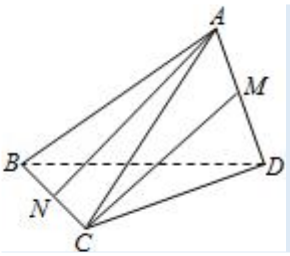
1. (2018 全国卷 II)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=1$， $AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知四面体 $ABCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，ΔABD 为边长 2 的等边三角形，$BD=DC$，$BD\perp CD$，则异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{4}$

3. 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB=AC=BD=CD=3$， $AD=BC=2$，点 M,N 分别是 AD,BC 的中点，则异面直线 AN,CM 所成的角的余弦值是____________.



4. (2016 全国 I 理）平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A， α // 平面 CB_1D_1，$\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$， $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$，则 m,n 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $30°$，则该长方体的体积为（　　）

A．8　　　B．$6\sqrt{2}$　　　C．$8\sqrt{2}$　　　D．$8\sqrt{3}$

6. (2018 全国卷 II)已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°，若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为____．

7. 已知圆台轴截面 $ABCD$ 的高为 2，$AB=2$，$CD=4$，E 是该圆台底面圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点，则直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{2}{3}$　　　C．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

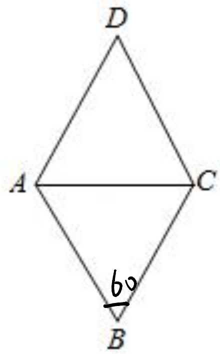
8. 在正方体 ABCD - $A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是 BD 中点，点 P 在线段 B_1D_1 上，直线 OP 与平面 A_1BD 所成的角为α，则 $\sin\alpha$ 的取值范围是（　　）

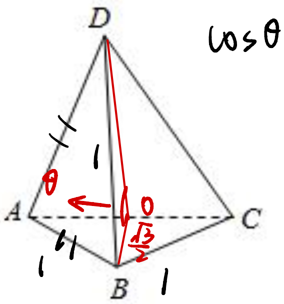
A．$[\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}]$　　B．$[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}]$　　C．$[\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$[\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}]$

9. 【2008 全国 1，理 11】已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心，则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　D．$\frac{2}{3}$

10. 在边长为 1 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，将菱形沿对角线 AC 折起，使折起后 $BD=1$，则二面角 $B-AC-D$ 的余弦值为（ A ）

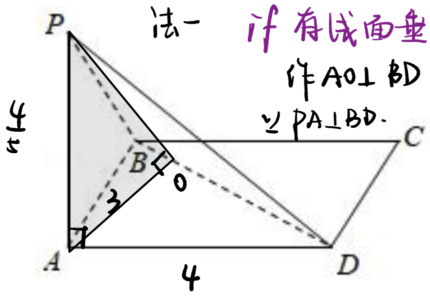




$\cos\theta=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\times\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{3}$

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知矩形 $ABCD$ 的两边 $AB=3$，$AD=4$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=\dfrac{4}{5}$，则二面角 $A-BD-P$ 的正切值为（ B ）



法一　if 有线面垂直 简单

作 $AO\perp BD$

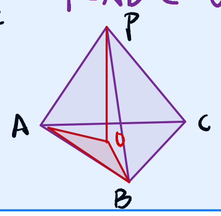
又 $PA\perp BD$.

$\therefore BD\perp$ 面 PAO

$\therefore BD\perp PO$.

$\tan\theta=\frac{1}{3}$.

法二　$P-AB-C=\theta$



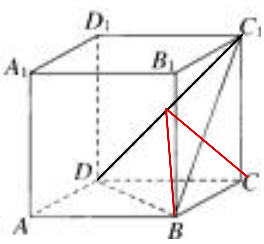
$\cos\theta=\dfrac{S_{投}}{S_{\triangle PAB}}$（微元）

大题 ×

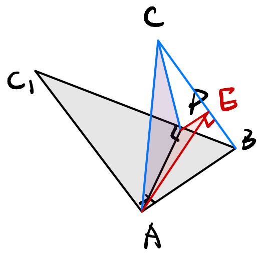
$\cos\theta=\dfrac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle PAB}}$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{3}$

12. 如图所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过顶点 B、D、C_1 作截面，则二面角 $B-DC_1-C$ 的平面角的余弦值是____．



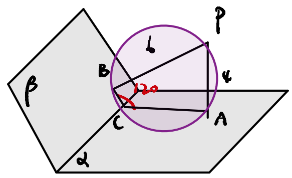
13. 将直角三角形 ABC 沿斜边上的高 AD 折成 $120°$ 的二面角，已知直角边 $AB=4\sqrt{3}, AC=4\sqrt{6}$，那么二面角 $A-BC-D$ 的正切值为____．



AD⊥面BCD.

$\tan\theta = \frac{\sqrt{42}}{3}$

14. 已知二面角 $\alpha-a-\beta$ 等于 $120°$，二面角内一点 P 满足，$PA\perp\alpha$，$A\in\alpha$，$PB\perp\beta$，$B\in\beta$．$PA=4$，$PB=6$．则点 P 到棱 a 的距离为____．



A、C、B、P四点共圆

PC = 直径

△ABP中 $AB^2 = 28$（正弦定理）

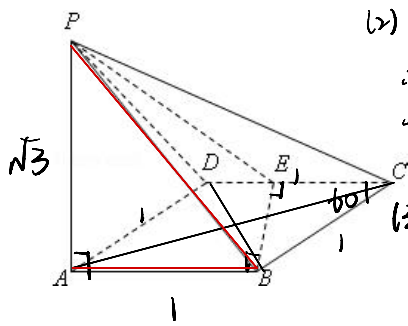
$2r = \frac{2\sqrt{7}}{\sin 60} = \frac{4\sqrt{21}}{3} = PC$

15. 如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle BCD=60°$，E 是 CD 的中点，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=\sqrt{3}$．

（1）证明：平面 $PBE\perp$ 平面 PAB；

（2）求异面直线 PC 与 BD 所成的角

（3）求二面角 $A-BE-P$ 的大小．



(1) 连接BD. ∵四边形ABCD为菱形. ∠BCD=60°

∴△BCD为等边△

∵E为中点

∴BE⊥CD

∵CD // AB

∴BE⊥AB

∵PA⊥面ABCD，BE ⊂ 面ABCD

∴PA⊥BE

又∵PA∩AB=A

∴BE⊥面PAB

∵BE⊂面PBE

∴面PBE⊥面PAB.

(2) BD⊥AC、BD⊥PA

∴BD⊥面PAC

∴BD⊥PC

(3) 由(1)可知

BE⊥面PAB.

∴BE⊥AB，BE⊥PB.

∴∠ABP为二面角

∴ tan∠ABP=√3

∴∠ABP=60°

16. 《九章算术》是中国古代的一部数学专著，是《算经十书》中最重要的一部，成于公元一世纪左右．它是一本综合性的历史著作，是当时世界上最简练有效的应用数学，它的出现标志着中国古代数学形成了完整的体系．《九章算术》中将由四个直角三角形组成的四面体称为“鳖臑”．已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC．

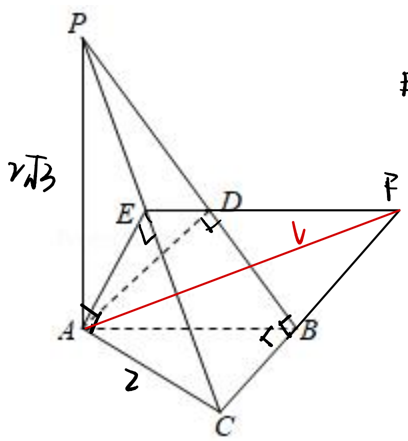
(1) 从三棱锥 $P-ABC$ 中选择合适的两条棱填空：BC $\perp$ AB，则三棱锥 $P-ABC$ 为“鳖臑”；

(2) 如图，已知 $AD\perp PB$，垂足为 D，$AE\perp PC$，垂足为 E，$\angle ABC=90^\circ$．

(ⅰ) 证明：平面 $ADE\perp$ 平面 PAC；

$AD\perp PB$　$AD\perp$ 面 PBC
$AD\perp BC$　$AD\perp PC$
$\because AE\perp PC$ $\Rightarrow$ 面 $ADE\perp$ 面 PAC

(ⅱ) 设平面 ADE 与平面 ABC 的交线为 l，若 $PA=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求二面角 $E-l-C$ 的大小．



$F\in DE\Rightarrow F\in$ 面 ADE
$F\in CB\Rightarrow F\in$ 面 ABC
由(i) $PC\perp$ 面 ADE.
$\because AF\subset$ 面 ADE
$\therefore PC\perp AF$．$AF\perp PA$.
$\therefore AF\perp$ 面 PAC.
$\therefore AF\perp AE$．$AF\perp AC$